

# Isogénies horizontales et classes d’isogénie de variétés abéliennes

Nicolas Ratazzi \*

20 novembre 2012

---

**Résumé :** L’objectif de cet article est double. D’une part obtenir un résultat d’isogénies horizontales (dans l’esprit de Frey-Jarden [6]) pour une certaine (vaste) famille de variétés abéliennes sur un corps de nombres  $K$  et d’autre part appliquer ce résultat pour obtenir une caractérisation “radicale”, suivant la méthode de Hall-Perucca [8], des classes d’isogénie de variétés abéliennes dans ladite famille. Précisément nous obtenons un résultat pour les variétés abéliennes pleinement de type  $\mathrm{GSp}$ , classe contenant notamment les variétés abéliennes  $A/K$  de dimension 2 ou impaire et génériques (telles que  $\mathrm{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$ ).

---

**Abstract :** The goal of this article is twofold. First we obtain a horizontal isogenies theorem (in the spirit of Frey-Jarden [6]) for a certain (large) class of abelian varieties on a number field  $K$ . Secondly we apply this result in order to obtain a “radical characterization”, following Hall-Perucca [8], of the isogenies classes of abelian varieties in the preceding class. Precisely we obtain a result for the abelian varieties faithfully of type  $\mathrm{GSp}$ , a class containing the abelian varieties  $A/K$  of dimension 2 or odd and generic (such that  $\mathrm{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$ ).

---

## 1 Introduction

L’objectif de cet article est double. D’une part obtenir un résultat d’isogénies horizontales (dans l’esprit de Frey-Jarden [6]) pour une certaine (vaste) famille de variétés abéliennes et d’autre part appliquer ce résultat pour obtenir une caractérisation “radicale”, suivant la méthode de Hall-Perucca [8], des classes d’isogénie de variétés abéliennes dans ladite famille. Précisément nous obtenons un résultat pour les variétés abéliennes pleinement de type  $\mathrm{GSp}$  au sens de la définition 1.1 ci-dessous.

---

\*nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr

Soit  $A$  une variété abélienne de dimension  $g \geq 1$  définie sur un corps de nombres  $K$ . Considérant l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  sur les points de  $\ell^\infty$ -torsion, pour  $\ell$  premier, on associe naturellement à  $A/K$ , la représentation  $\ell$ -adique

$$\rho_{\ell^\infty, A} : G_K := \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}(T_\ell(A)) \simeq \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$$

avec  $T_\ell(A) = \varprojlim A[\ell^n]$  le module de Tate  $\ell$ -adique de  $A$  et on note également son image

$$\rho_{\ell^\infty, A}(G_K) := G_{\ell^\infty, A}.$$

Nous noterons également  $\rho_{\ell, A}$  et  $G_{\ell, A}$  (voire  $\rho_\ell$  et  $G_\ell$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) les objets déduits modulo  $\ell$ . On supposera pour simplifier que  $A$  est munie d'une polarisation principale. Dans ce cas  $\rho_{\ell^\infty, A}$  est à valeurs dans  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  (dans le cas général, une polarisation  $e$  sur  $A$  étant choisie, munissant les  $T_\ell(A)$  d'une forme alternée  $e_\ell$ , la représentation est à valeurs dans  $\text{GSp}_{2g}(T_\ell(A), e_\ell)$ ).

Un problème naturel est de savoir quand l'image  $G_{\ell^\infty, A}$  est d'indice fini dans  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ , voire surjective pour tout premier  $\ell$  assez grand (dépendant de  $A/K$ ).

**Définition 1.1** Soit  $A/K$  une variété abélienne de dimension  $g \geq 1$ . Nous dirons que  $A$  est *pleinement de type GSp* si  $A$  est telle que

$$\forall \ell \gg 0, \quad \rho_{\ell, A}(G_K) = \text{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell).$$

On sait par exemple après Serre [17] que toute courbe elliptique sans CM, ie à anneau d'endomorphismes (sur  $\bar{K}$ )  $\text{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$ , est pleinement de type GSp (il s'agit même dans ce cas d'une condition équivalente à être sans CM sur  $\bar{K}$ ). En dimension quelconque, une condition nécessaire est d'avoir  $\text{End}_{\bar{K}} A = \mathbb{Z}$ ; cette condition n'est pas en général suffisante, mais on sait qu'elle l'est (cf. théorème 1.3 ci-dessous) si  $g$  n'appartient pas à l'ensemble exceptionnel  $\mathcal{S}$  défini comme suit.

**Notations 1.2** On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des entiers  $g \geq 1$  tels que  $2g$  est une puissance  $k$ -ième avec  $k \geq 3$  impair ou soit de la forme  $\binom{2k}{k}$  avec  $k \geq 3$  impair; en symboles :

$$\mathcal{S} := \left\{ g \geq 1 \mid \exists k \geq 3, \text{ impair}, \exists a \geq 1, g = 2^{k-1}a^k \right\} \cup \left\{ g \geq 1 \mid \exists k \geq 3, \text{ impair}, g = \frac{1}{2} \binom{2k}{k} \right\} \quad (1)$$

Dans notre contexte le résultat important est un théorème de Serre [19] complété par Pink [13], où l'ensemble  $\mathcal{S}$  est décrit par l'équation (1) ci-dessus, et dans une autre direction par Hall [7].

**Théorème 1.3 (Serre, Pink, Hall)** *Si  $A/K$  est une variété abélienne de dimension  $g$  n'appartenant pas à  $\mathcal{S}$ , définie sur un corps de nombres, telle que  $\text{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$ , alors  $A$  est pleinement de type GSp. Si  $g$  est quelconque mais l'on suppose que le groupe de Mumford-Tate  $\text{MT}(A) = \text{GSp}$  et que le modèle de Néron de  $A$  sur  $\mathcal{O}_K$  possède une fibre semistable avec dimension torique égale à un, la même conclusion vaut.*

**Remarque 1.4** Dans [18] (théorème 3 paragraphe 7), Serre démontre que, dans le cas où  $\text{MT}(A) = \text{GSp}$  (équivalent à  $\text{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$  quand  $g \notin \mathcal{S}$ ), le fait que le groupe  $G_{\ell^\infty}$  est un sous-groupe de  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  d'indice fini entraîne que  $G_\ell$  est *égal* à  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$  pour  $\ell$  assez grand, que ceci implique que  $G_{\ell^\infty}$  est *égal* à  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  pour  $\ell$  assez grand et enfin que cela est vrai si  $g$  est impair ou valant 2 ou 6 ; dans [13], Pink établit que le groupe  $G_{\ell^\infty}$  est un sous-groupe de  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  d'indice fini pour les valeurs de  $g$  évitant l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Enfin Hall [7] montre que dans le cas où  $\text{MT}(A) = \text{GSp}$ , si l'on suppose que le modèle de Néron de  $A$  sur  $\mathcal{O}_K$  possède une fibre semistable avec dimension torique égale à 1, alors on obtient la même conclusion.

Le théorème 1.3 précédent donne une vaste classe de variétés abéliennes pleinement de type  $\text{GSp}$ . Nous pouvons maintenant énoncer le premier de nos deux résultats, le théorème d'isogénies horizontales.

**Théorème 1.5** *Soient  $A, B/K$  deux variétés abéliennes pleinement de type  $\text{GSp}$ , sur un corps de nombres  $K$ . Soit  $c > 0$  telle qu'il existe un ensemble infini  $\Lambda$  de nombre premiers, vérifiant*

$$\forall \ell \in \Lambda, \quad [K(A[\ell], B[\ell]) : K(A[\ell])] \leq c.$$

*Alors  $A$  est  $\bar{K}$ -isogène à  $B$ .*

Dans le cas de dimension 1, ceci est un résultat de Frey-Jarden [6] basé sur les travaux de Serre [17], cf. également [10] section 5. En fait le résultat de [6] est plus général car il vaut pour des courbes elliptiques quelconques sur un corps  $K$  de type fini sur son sous-corps premier. Par des méthodes différentes on peut obtenir un résultat analogue dans le cas des variétés abéliennes de type CM. Ceci fera l'objet d'un travail ultérieur.

Notons que l'on ne suppose pas a priori que  $A$  et  $B$  sont de même dimension : c'est une conséquence automatique.

Nous pouvons maintenant énoncer notre second résultat (dû à Hall-Perucca [8] en dimension 1).

**Théorème 1.6** *Soit  $K$  un corps de nombres et soient  $A_1, A_2/K$  deux variétés abéliennes pleinement de type  $\text{GSp}$ . Considérons  $S$  un sous-ensemble de places finies de  $K$ , de bonne réduction pour  $A_1$  et  $A_2$ , de densité analytique 1 et supposons également donné un sous-ensemble  $\Lambda$  infini de l'ensemble des nombres premiers. Alors  $A_1$  est  $K$ -isogène à  $A_2$  si et seulement si*

$$\forall v \in S, \forall \ell \in \Lambda \quad (\ell \mid \text{Card}(A_1(\mathbb{F}_v)) \iff \ell \mid \text{Card}(A_2(\mathbb{F}_v))).$$

Notons que l'on sait après Faltings [5] que la classe d'isogénie d'une variété abélienne  $A/K$  est donnée par sa fonction  $\zeta$ , qui donne en particulier les valeurs  $\text{Card}(A(\mathbb{F}_v))$ . Notre résultat (dont la preuve utilise [5]) prouve qu'une donnée sensiblement plus faible est en fait suffisante (au moins pour les variétés abéliennes pleinement de type  $\text{GSp}$ ).

S'il est clair qu'un tel résultat doit se borner à des variétés abéliennes sans facteur carré (ie  $A$  isogène à un produit  $\prod A_i$  les  $A_i$  deux à deux non isogènes), il doit être possible, en utilisant les résultats connus sur les images de Galois (cf. notamment [17] et [9]) de traiter au moins le cas des produits de courbes elliptiques sans facteur carré. Nous comptons revenir sur ce problème dans un article ultérieur.

**Plan de l'article :** Après des rappels sur les groupes symplectiques utilisés dans toutes les autres parties, nous prouvons le théorème 1.5 dans les paragraphes 3 et 4, suivant la méthode de [6] en étendant le paragraphe 6 de [17] à notre situation. Nous utilisons ensuite ce résultat et, adaptant la méthode de [8] en dimension supérieure, nous prouvons le théorème 1.6 dans la dernière partie.

**Remerciements :** Je remercie Pascal Autissier et Chris Hall pour les commentaires qu'ils m'ont fait sur une version préliminaire de ce texte.

## 2 Rappels sur les groupes symplectiques

### 2.1 Les groupes $\mathrm{Sp}$ et $\mathrm{GSp}$

Soit  $J$  une matrice antisymétrique non dégénérée, on définit le groupe algébrique :

$$\mathrm{GSp}_{2g,J} := \{ M \in \mathrm{GL}_{2g} \mid \exists \lambda(M) \in \mathbb{G}_m, {}^t M J M = \lambda(M) J \}.$$

Après changement de base, on peut supposer que  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ ; on note alors  $\mathrm{GSp}_{2g} = \mathrm{GSp}_{2g,J}$ . C'est un groupe algébrique sur  $\mathbb{Z}$ , et on a

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}_{2g} \iff \begin{cases} {}^t A C \text{ et } {}^t B D \text{ sont symétriques} \\ \exists \lambda(M) \in \mathbb{G}_m, {}^t A D - {}^t C B = \lambda(M) I_g \end{cases}$$

On introduit  $\lambda : \mathrm{GSp}_{2g} \rightarrow \mathbb{G}_m$ , l'homomorphisme qui associe à  $M$  son multiplicateur  $\lambda(M)$ .

**Remarque 2.1** Notons le lien suivant entre l'application multiplicateur et le déterminant :

$$\forall M \in \mathrm{GSp}_{2g} \quad (\det M) = \lambda(M)^g.$$

Rappelons également le lien bien connu entre caractère cyclotomique, représentation  $\ell$ -adique et multiplicateur :

**Lemme 2.2** *En notant  $\rho_\ell$  la représentation  $\ell$ -adique mod  $\ell$  associée à une variété abélienne, la composée  $\lambda \circ \rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$  n'est autre que le caractère cyclotomique  $\chi_{\mathrm{cycl}}$ .*

## 2.2 Simplicité et automorphismes

Nous rassemblons ici quelques résultats classiques sur les groupes symplectiques, leurs sous-groupes distingués et leurs automorphismes.

**Lemme 2.3** *Soient  $g_1, g_2$  deux entiers strictement positifs et soit  $\ell$  un nombre premier impair. On se donne également  $Z_i \subset \{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}_{2g_i}(\mathbb{F}_\ell)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Alors*

$$|\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)/Z_1| = |\mathrm{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)/Z_2| \Rightarrow g_1 = g_2.$$

*Démonstration* : Le cardinal d'un  $\ell$ -Sylow est  $\ell^{g_i^2}$ . □

**Lemme 2.4** *Soit  $g \geq 1$  et soit  $K$  un corps ; on exclut les cas  $g = 1, K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$  ou  $\mathbb{F}_4$  et  $g = 2, K = \mathbb{F}_2$ . Le seul sous-groupe normal non trivial de  $\mathrm{Sp}_{2g}(K)$  est son centre  $\{\pm 1\}$  ; les  $K$ -automorphismes de  $\mathrm{Sp}_{2g}(K)$  sont tous intérieurs et ceux de  $\mathrm{P}\mathrm{Sp}_{2g}(K)$  proviennent par quotient des précédents.*

*Démonstration* : Voir Dieudonné [4], Chap. IV paragraphe 3 et Chap. IV paragraphe 6. □

**Remarque 2.5** Il est clair (c'est en fait plus facile à montrer) que tout automorphisme du groupe algébrique  $\mathrm{Sp}_{2g}$  est induit par un automorphisme intérieur. On peut aussi étendre ce lemme au groupe des similitudes symplectiques.

**Lemme 2.6** *Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe normal de  $G$  dont le centralisateur est trivial (i.e. tel que  $C_G(H) = \{1\}$ ). Un automorphisme de  $G$  induisant l'identité sur  $H$  est l'identité sur  $G$ .*

*Démonstration* : Soit  $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$  tel que  $\psi|_H = \mathrm{id}_H$ . Soit  $x \in H$  et  $y \in G$  alors  $\psi(y)x\psi(y)^{-1} = \psi(yxy^{-1}) = yxy^{-1}$ . On en tire  $y^{-1}\psi(y) \in C_G(H)$  donc  $\psi(y) = y$  et on a bien  $\psi = \mathrm{id}_G$ . □

**Lemme 2.7** *Soit  $g \geq 1$  et  $K$  un corps comme dans le lemme 2.4. Les  $K$ -automorphismes de  $\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$  sont tous intérieurs et l'action par conjugaison se fait via un élément de  $\mathrm{Sp}_{2g}(K)$ .*

*Démonstration* : Il s'agit de la preuve de [10] que nous rappelons ici. Le groupe  $\mathrm{P}\mathrm{Sp}_{2g}(K)$  est le sous-groupe des commutateurs de  $\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$ , donc, si  $\phi$  est un automorphisme de  $\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$ , sa restriction à  $\mathrm{P}\mathrm{Sp}_{2g}(K)$  induit un automorphisme de  $\mathrm{P}\mathrm{Sp}_{2g}(K)$ . Or le lemme 2.4 nous indique que de tels automorphismes sont intérieurs et proviennent par quotient d'un automorphisme (nécessairement intérieur) de  $\mathrm{Sp}_{2g}(K)$ . Par ailleurs, le quotient de

$\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$  par  $\mathrm{PSp}_{2g}(K)$  n'est autre que le groupe  $K^\times / K^{\times 2}$  comme on le voit en écrivant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & 1 & & 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & K^\times & \xrightarrow{x \mapsto x^2} & (K^\times)^2 \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Sp}_{2g}(K) & \longrightarrow & \mathrm{GSp}_{2g}(K) & \longrightarrow & K^\times \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{PSp}_{2g}(K) & \longrightarrow & \mathrm{PGSp}_{2g}(K) & \longrightarrow & K^\times / (K^\times)^2 \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Notamment tout automorphisme  $\phi$  de  $\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$  induit un automorphisme  $\phi|$  sur  $\mathrm{PSp}_{2g}(K)$ . Soit  $y \in \mathrm{Sp}_{2g}(K)$  tel que

$$\forall x \in \mathrm{PSp}_{2g}(K), \quad \phi|_|(x) = \bar{y}x\bar{y}^{-1}.$$

Définissons  $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{PGSp}_{2g}(K))$  par  $\psi(x) = \bar{y}x\bar{y}^{-1}$ . Montrons que  $\phi \circ \psi^{-1}$  est l'identité sur  $\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$ . On sait déjà que  $(\phi \circ \psi^{-1})|_{\mathrm{PSp}_{2g}(K)} = \mathrm{id}$  et on conclut grâce au lemme 2.6, en observant que le centralisateur de  $\mathrm{PSp}_{2g}(K)$  dans  $\mathrm{PGSp}_{2g}(K)$  est trivial.  $\square$

**Lemme 2.8** *Soit  $\ell > 3$  premier. Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$  se projetant surjectivement sur  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ , alors  $H = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ .*

*Démonstration :* Voir Serre [18], lemme 1 page 52.  $\square$

## 3 Réduction à un twist quadratique près

### 3.1 Un lemme de réduction

Dans la suite,  $\Lambda$  désignera toujours un ensemble infini de nombres premiers,  $A_1$  et  $A_2$  sont des variétés abéliennes pleinement de type  $\mathrm{GSp}$ , de dimensions respectives  $g_1, g_2$ , définies sur un corps de nombres  $K$ . Nous noterons également

$$N_\ell := K(A_1[\ell], A_2[\ell]) \quad \text{et} \quad M_\ell := K(A_1[\ell]) \cap K(A_2[\ell]).$$

Énonçons maintenant notre lemme de réduction.

**Lemme 3.1** *On suppose ici qu'il existe  $c > 0$  et un ensemble  $\Lambda$  infini tel que pour tout  $\ell \in \Lambda$ , on a*

$$[N_\ell : K(A_1[\ell])] \leq c.$$

*Alors,  $g_1 = g_2$  et pour tout  $\ell \in \Lambda$  assez grand, on a*

$$\text{soit } K(A_1[\ell]) = K(A_2[\ell]), \text{ soit } [N_\ell : K(A_1[\ell])] = 2 = [K(A_1[\ell]) : M_\ell].$$

*Démonstration :* Soit  $\ell \in \Lambda$ . On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & N_\ell := K(A_1[\ell], A_2[\ell]) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ K(A_1[\ell]) & & K(A_2[\ell]) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & M_\ell := K(A_1[\ell]) \cap K(A_2[\ell]) & \\ & \downarrow & \\ & K(\mu_\ell) & \end{array}$$

Notons  $H_\ell$  (respectivement  $H'_\ell$ ) le groupe correspondant à l'extension  $K(A_1[\ell])/M_\ell$  (respectivement  $K(A_2[\ell])/M_\ell$ ). L'extension  $M_\ell/K(\mu_\ell)$  est galoisienne donc si  $\ell$  est assez grand, les variétés abéliennes  $A_1$  et  $A_2$  étant pleinement de type  $\text{GSp}$ , les groupes  $H_\ell$  et  $H'_\ell$  sont des sous-groupes distingués de  $\text{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$ , respectivement  $\text{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)$ . Par le lemme 2.4 on en déduit que ces groupes sont  $\{1\}$ ,  $\{\pm 1\}$  ou le groupe spécial symplectique tout entier. Nous allons distinguer les différents cas possibles.

1. Si  $H_\ell = \{1\}$ . Dans ce cas l'extension  $K(A_1[\ell])$  est incluse dans  $K(A_2[\ell])$  et donc  $N_\ell = K(A_2[\ell])$ . Dès lors, soit  $H'_\ell = \{1\}$  et donc  $K(A_1[\ell]) = K(A_2[\ell])$ ; soit  $H'_\ell = \{\pm 1\}$  et on obtient l'égalité de cardinaux suivante :  $2 \times |\text{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)| = |\text{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)|$  donc  $g_1 = g_2$  par le lemme 2.3 et l'égalité précédente est alors impossible. Enfin, si  $H'_\ell = \text{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)$ , alors  $K(A_1[\ell]) = M_\ell = K(\mu_\ell)$  ce qui est impossible. Donc

$$H_\ell = \{1\} \Rightarrow H'_\ell = \{1\}.$$

2. Si  $H_\ell = \{\pm 1\}$ . Dans ce cas on sait déjà que  $H'_\ell = \{1\}$  est impossible (par symétrie avec le cas précédent). De même, si  $H'_\ell = \text{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)$ , alors  $M_\ell = K(\mu_\ell)$  et donc  $H_\ell = \text{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$  ce qui est absurde. Donc

$$H_\ell = \{\pm 1\} \Rightarrow H'_\ell = \{\pm 1\}.$$

3. Si  $H_\ell = \text{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$  on voit immédiatement par symétrie avec les cas précédents que nécessairement  $H'_\ell = \text{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)$ . Or  $K(A_1[\ell])$  et  $K(A_2[\ell])$  sont linéairement disjointes au dessus de  $M_\ell$  donc  $|H'_\ell| = [N_\ell : K(A_1[\ell])] \leq c$  ce qui est impossible si  $\ell$  est suffisamment grand.

Dans les deux premiers cas précédents notons que l'on aboutit à une égalité de la forme

$$|\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)/H_\ell| = |\mathrm{Sp}_{2g_2}(\mathbb{F}_\ell)/H'_\ell|$$

et le lemme 2.3 implique  $g_1 = g_2$ . □

Ce lemme dit notamment que s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour un ensemble infini de premiers on a  $[N_\ell : K(A_1[\ell])] \leq c$ , alors en fait la même chose est vraie avec  $c = 2$ . Nous supposons désormais  $c = 2$  dans la suite.

### 3.2 Résultat à un twist quadratique près

Nous conservons les notations du paragraphe précédent. Par ailleurs, étant données deux représentations  $\ell$ -adiques,  $\rho_1 : G_K \rightarrow \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_\ell)$  et  $\rho_2 : G_K \rightarrow \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F}_\ell)$ , nous écrirons  $\rho_1 \sim \rho_2$  si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont équivalentes, c'est à dire si  $n := n_1 = n_2$  et s'il existe  $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$  tel que  $u^{-1}\rho_1 u = \rho_2$ .

**Proposition 3.2** *Soit  $\ell$  un nombre premier tel que  $G_{\ell, A_i} = \mathrm{GSp}_{2g_i}(\mathbb{F}_\ell)$ . On suppose de plus que  $g_1 = g_2$  et que  $[N_\ell : K(A_1[\ell])] \leq 2$ . Alors il existe un caractère quadratique*

$$\varepsilon_\ell : G_K \rightarrow \{\pm 1\} \quad \text{tel que} \quad \rho_{\ell, A_1} \sim \varepsilon_\ell \otimes \rho_{\ell, A_2}.$$

*Démonstration :* Notons  $g$  l'entier  $g_1 = g_2$  et introduisons la projection canonique  $\pi_\ell : \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell) \rightarrow \mathrm{PGSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$  de noyau  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . Notons  $\bar{\rho}_{A_1, \ell}$  la composée de  $\rho_{A_1, \ell}$  par  $\pi_\ell$  et de même pour  $A_2$ . Posons  $L_{A_1, \ell}$  le corps fixé par  $\ker(\bar{\rho}_{A_1, \ell})$  et de même pour  $L_{A_2, \ell}$  correspondant à  $\bar{\rho}_{A_2, \ell}$ . Le corps  $L_{A_i, \ell}$  est le sous-corps de  $K(A_i[\ell])$  fixant le centre de  $G_{K(A_i[\ell])/K}$ . Nous allons montrer que

$$L_{A_1, \ell} = L_{A_2, \ell}. \tag{2}$$

Admettons (2) un instant et voyons comment conclure : par la théorie de Galois on obtient  $\ker(\bar{\rho}_{A_1, \ell}) = \ker(\bar{\rho}_{A_2, \ell})$ . Ainsi, à un automorphisme de  $\mathrm{PGSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$  près,  $\bar{\rho}_{A_1, \ell}$  et  $\bar{\rho}_{A_2, \ell}$  coïncident. Or d'après le lemme 2.7 les automorphismes de  $\mathrm{PGSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$  sont intérieurs et l'action par conjugaison se fait via un élément de  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ . Autrement dit,

$$\exists y \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell) \quad \forall x \in G_K, \quad \pi_\ell(\rho_{A_1, \ell}(x)) = \pi_\ell(y^{-1}\rho_{A_1, \ell}(x)y).$$

Ainsi il existe un morphisme  $\varepsilon_\ell : G_K \rightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$  tel que

$$\forall x \in G_K, \quad \rho_{A_1, \ell}(x) = \varepsilon_\ell(x) (y^{-1}\rho_{A_1, \ell}(x)y).$$

En composant par le morphisme multiplicateur et en appliquant le lemme 2.2 on en déduit que

$$\forall x \in G_K, \quad \varepsilon_\ell(x)^2 = 1.$$

Reste à prouver l'assertion (2) pour conclure. C'est ce que nous allons nous attacher à faire ci-dessous.



Commençons par remarquer que si  $K(A_1[\ell]) = K(A_2[\ell])$ , il n'y a rien à montrer. En utilisant les hypothèses, on suppose donc dans ce qui suit que

$$[K[(A_1[\ell]) : M_\ell] = [K[(A_2[\ell]) : M_\ell] = 2.$$

Notamment, la représentation  $\rho_{\ell, A_1}$  envoie  $M_\ell$  sur l'unique sous-groupe  $\{\pm 1\}$  distingué d'ordre 2 de  $\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$ .

**Fait 1 :** Le corps  $K(\mu_\ell) \cap L_{A_1, \ell}$  est l'unique sous-extension quadratique de  $K(\mu_\ell)/K$ .

Pour  $\ell$  assez grand, l'extension  $K(\mu_\ell)/K$  est cyclique de groupe de Galois  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . Elle possède donc une et une seule sous-extension quadratique correspondant à l'unique sous-groupe d'indice 2 de  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & K(A_1[\ell]) & \\ \mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell) \swarrow & & \searrow \mathbb{F}_\ell^\times = Z(\mathrm{GSp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)) \\ K(\mu_\ell) & & L_{A_1, \ell} \end{array}$$

Or le groupe engendré par  $\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$  et  $\mathbb{F}_\ell^\times$  (correspondant via la théorie de Galois à l'extension  $K(\mu_\ell) \cap L_{A_1, \ell}$ ) n'est autre que le sous-groupe

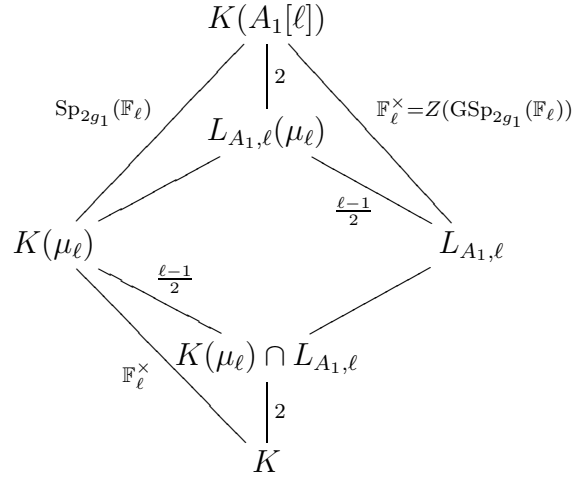
$$\{xM \in \mathrm{GSp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell) \mid x \in \mathbb{F}_\ell^\times, M \in \mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)\}.$$

Ce sous-groupe est d'indice 2 dans  $\mathrm{GSp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$ . En effet, il est clair sur la définition du multiplicateur  $\lambda$  que  $\lambda(xI) = x^2$  pour tout scalaire non nul  $x$ . Dès lors on conclut en considérant la décomposition  $M^2 = \lambda(M) \left( \frac{1}{\lambda(M)} M^2 \right)$  ainsi que le fait que les carrés de  $\mathbb{F}_\ell^\times$  forment un sous-groupe d'indice deux dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$  pour  $\ell$  impair.  $\square$

**Fait 2 :** On a l'égalité  $M_\ell = L_{A_1, \ell}(\mu_\ell)$ .

Par construction,  $L_{A_1, \ell}$  est le sous-corps de  $K(A_1[\ell])$  des invariants par  $\mathbb{F}_\ell^\times = Z(\mathrm{GSp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell))$ . Or on a vu que  $M_\ell$  est le sous-corps de  $K(A_1[\ell])$  des invariants par  $\{\pm 1\} = Z(\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell))$ . On en déduit que  $L_{A_1, \ell}$  est inclus dans  $M_\ell$ . L'extension  $K(A_1[\ell])/M_\ell$  étant de degré deux, il suffit de voir qu'il en est de même pour l'extension  $K(A_1[\ell])/L_{A_1, \ell}(\mu_\ell)$  pour conclure.

Pour cela il suffit de regarder le diagramme d'extensions suivant :



□

Symétriquement le corps  $L_{A_2, \ell}$  vérifie également les faits 1 et 2. Le groupe de Galois  $\text{Gal}(M/K(\mu_\ell)) = \text{PSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$  étant simple non abélien, ceci détermine le corps  $L_{A_i, \ell}$  de manière unique. □

## 4 Preuve du théorème 1.5

Nous utiliserons ci-dessous la version suivante des résultats fondamentaux de Faltings [5].

**Proposition 4.1 (Faltings)** *Soient  $A$  et  $B$  deux variétés abéliennes sur un corps de nombres  $K$ . Notons  $\rho_{\ell^\infty, A} : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Aut}(\text{T}_\ell(A))$ , respectivement  $\rho_{\ell, A} : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Aut}(A[\ell])$ , la représentation associée à l'action de Galois sur les points de torsion de  $A$ . On définit de même  $\rho_{\ell^\infty, B}$  et  $\rho_{\ell, B}$ .*

- *Si  $\rho_{\ell^\infty, A}$  est isomorphe à  $\rho_{\ell^\infty, B}$  alors  $A$  est  $K$ -isogène à  $B$ .*
- *Il existe  $C_0 = C_0(A, K)$  telle que si pour un entier  $\ell \geq C_0$  et  $\rho_{\ell, A} \cong \rho_{\ell, B}$  alors  $A$  est  $K$ -isogène à  $B$ .*

*Démonstration :* Dans l'article de Faltings [5], le premier énoncé est démontré dans le Korollar 2, page 361 ; le deuxième énoncé, pour  $\bar{\rho}_\ell$ , peut se déduire des démonstrations comme cela est montré par Zarhin [21], Corollary 5.4.5. □

Soit  $K$  un corps de nombres et soient  $A_1, A_2$  deux variétés abéliennes de dimensions respectives  $g_1, g_2$ , pleinement de type  $\text{GSp}$ , définies sur  $K$ , telles qu'il existe  $c > 0$  et un ensemble infini  $\Lambda$  de premiers, tels que  $[N_\ell : K(A[\ell])] \leq c$  pour tout  $\ell \in \Lambda$ .

D'après le lemme de réduction 3.1, on voit que  $g_1 = g_2 =: g$  et que  $[N_\ell : K(A[\ell])] \in \{1, 2\}$  (quitte à enlever un nombre fini de premiers de l'ensemble  $\Lambda$ ). La proposition 3.2 entraîne alors qu'il existe un morphisme quadratique

$$\varepsilon_\ell : G_K \rightarrow \{\pm 1\} \text{ tel que } \rho_{\ell, A_1} \sim \varepsilon_\ell \otimes \rho_{\ell, A_2}.$$

**Proposition 4.2** *Si  $\ell \geq 4g + 1$ , alors  $\varepsilon_\ell$  est non ramifié en toute place ultramétrique non ramifiée sur  $\mathbb{Q}$  en laquelle  $A_1$  et  $A_2$  ont bonne réduction. En particulier, lorsque  $\ell$  varie, le noyau  $\ker(\varepsilon_\ell)$  varie dans un ensemble fini.*

*Démonstration* : Il s'agit de reprendre l'argument de la preuve du lemme 8 de [17] en utilisant le corollaire 3.4.4. de [14] en lieu et place des corollaires 11 et 12 de [17] : soit  $v$  une place ultramétrique du corps  $K$  telle que  $A_1$  et  $A_2$  ont bonne réduction en  $v$  et que  $v$  est non ramifiée sur  $\mathbb{Q}$ . Supposons que la caractéristique de  $v$  est  $\ell$  (en effet  $\varepsilon_\ell$  est non ramifié en  $v$  sinon [20]) et notons  $k_\ell$  une clôture algébrique de  $\mathbb{F}_\ell$ . Notons par ailleurs  $\chi_1, \dots, \chi_{2g}$  (respectivement  $\chi'_1, \dots, \chi'_{2g}$ ) les caractères du groupe d'inertie modérée en  $v$  à valeurs dans  $k_\ell^\times$ , intervenant dans le module galoisien  $A_1[\ell] \otimes k_\ell$  (resp.  $A_2[\ell] \otimes k_\ell$ ), cf. [17] paragraphe 1.13. et [14] corollaire 3.4.4. En notant  $\varepsilon_v$  la restriction de  $\varepsilon_\ell$  au groupe d'inertie en  $v$ , on a pour tout  $i$ , (quitte à renuméroter les  $\chi'_i$ )

$$\chi_i = \varepsilon_v \chi'_i$$

Comme l'indice de ramification  $e(v)$  de  $v$  est 1, le corollaire 3.4.4. de [14] nous dit que les  $\chi_i$  sont de la forme

$$\chi_i = \theta_{k_1}^{e(k_1)} \dots \theta_{k_n}^{e(k_n)}$$

où pour tout  $r$ ,  $e(r) \in \{0, 1\}$  et où les  $\theta_{k_i}$  sont les  $n$  caractères fondamentaux de niveau  $n$ , l'entier  $n$  pouvant varier dans  $1, \dots, 2g$ . Les invariants des  $\chi_i$  et  $\chi'_i$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (cf. [17] paragraphe 1.7) varient dans l'ensemble :

$$X = \left\{ e(k_1) \frac{\ell^{k_1}}{\ell^n - 1} + \dots + e(k_n) \frac{\ell^{k_n}}{\ell^n - 1} \mid k_i \in \{0, \dots, n-1\}, n \in \{1, \dots, 2g\} \right\}.$$

Enfin, comme  $\varepsilon_v^2 = 1$ , son invariant est 0 ou  $\frac{1}{2}$  et est de la forme  $x - x'$  avec  $x, x' \in X$ . Or si

$$x = e(k_1) \frac{\ell^{k_1}}{\ell^n - 1} + \dots + e(k_n) \frac{\ell^{k_n}}{\ell^n - 1},$$

$$0 \leq x \leq \frac{n\ell^{n-1}}{\ell^n - 1} < \frac{2g}{\ell - 1}.$$

En particulier,  $|x - x'| < \frac{2g}{\ell - 1}$ , et comme  $\ell \geq 4g + 1$ , on voit que  $|x - x'| < \frac{1}{2}$ , donc nécessairement l'invariant de  $\varepsilon_v$  vaut 0, ce qui signifie que  $\varepsilon_v$  est non ramifié en  $v$ .  $\square$

Soit  $\ell \in \Lambda$ ,  $\ell \geq 4g + 1$ . Les  $\varepsilon_\ell$  définis précédemment sont non ramifiés en dehors d'un ensemble fini de places de  $K$  indépendant de  $\ell$ . Ceci implique que les  $\varepsilon_\ell$  varient dans un ensemble fini (quand  $\ell$  est variable). Quitte à remplacer  $\Lambda$  par une sous-partie infinie, on peut donc supposer que  $\varepsilon_\ell$  est indépendant de  $\ell$  : notons le  $\varepsilon$ . Sur l'extension  $K'$  de  $K$  correspondant au noyau de  $\varepsilon$ , on obtient donc que les représentations  $\rho_{\ell, A_1}$  et  $\rho_{\ell, A_2}$  sont isomorphes. Par la seconde partie de la proposition 4.1 ceci implique que  $A_1$  et  $A_2$  sont  $\overline{K}'$ -isogènes, ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## 5 Radicaux et isogénies

Dans cette partie nous supposerons données deux variétés abéliennes  $A_1, A_2/K$  sur un corps de nombres, pleinement de type GSp, de dimensions respectives  $g_1, g_2$ .

**Notations 5.1** Étant donnée une variété abélienne  $A/K$ , nous noterons  $S_K(A)$  (voire  $S(A)$  s'il n'y a pas de confusion possible) l'ensemble des places finies de  $K$  de bonne réduction pour  $A$ . Si  $v$  est une place de bonne réduction, la variété réduite modulo  $v$  est une variété abélienne sur le corps  $\mathbb{F}_v$ . Par ailleurs, pour tout nombre premier  $\ell$ , nous introduisons la fonction

$$f_{\ell,A} : S_K(A) \rightarrow \{0, 1\}, \text{ définie par } v \mapsto \min\{1, v_\ell(\text{Card}(A(\mathbb{F}_v)))\}.$$

Par construction  $f_{\ell,A}(v) = 1$  si et seulement si  $\ell \mid \text{Card}(A(\mathbb{F}_v))$ .

Le théorème 1.6 se reformule ainsi de la manière suivante :

**Théorème 5.2 (=théorème 1.6) :** *Soient  $A_1, A_2/K$  comme précédemment. Soit  $S'$  un sous-ensemble de densité 1 de  $S_K(A_1) \cap S_K(A_2)$ . Soit  $\Lambda$  un ensemble infini de nombres premiers. Alors,*

$$A_1 \text{ est } K\text{-isogène à } A_2 \text{ si et seulement si } \forall \ell \in \Lambda, \forall v \in S', f_{\ell,A_1}(v) = f_{\ell,A_2}(v).$$

Notons que seule la partie *si* doit être prouvée, la partie *seulement si* étant facile. Suivant la stratégie de [8] nous décomposons la preuve de l'implication *si* en trois étapes :

1. Montrer, pour  $\ell$  variant dans un sous-ensemble infini  $\Lambda_1$  de  $\Lambda$ , que l'on a  $K(A_1[\ell]) = K(A_2[\ell])$ , puis en déduire que  $A_1$  et  $A_2$  sont  $\overline{K}$ -isogènes.
2. Montrer qu'il existe un caractère quadratique  $\varepsilon : G_K \rightarrow \{\pm 1\}$  tel que pour tout  $\ell$  variant dans un sous-ensemble infini  $\Lambda_2$  de  $\Lambda_1$  on a  $\rho_{\ell,A_1} \sim \varepsilon \otimes \rho_{\ell,A_2}$ .
3. Montrer que pour tout  $\ell$  variant dans un sous-ensemble infini  $\Lambda_3$  de  $\Lambda_2$  on a en fait  $\rho_{\ell,A_1} \sim \rho_{\ell,A_2}$ , puis conclure que  $A_1$  et  $A_2$  sont  $K$ -isogènes.

### 5.1 Preuve de l'étape (1)

Remarquons que si pour une infinité de  $\ell$  il est vrai que  $K(A_1[\ell]) = K(A_2[\ell])$  alors notre théorème 1.5 sur les isogénies horizontales permet de conclure directement que  $A_1$  et  $A_2$  sont  $\overline{K}$ -isogènes (en effet pour les  $\ell$  concernés  $[K(A_1[\ell], A_2[\ell]) : K(A_1[\ell])] = 1$ ). Notons que nous utilisons ici de manière sous-jacente les résultats de Faltings [5].

**Définition 5.3** Soient  $A, B/K$  deux variétés abéliennes. Deux fonctions  $f_1, f_2$  définies sur  $S_K(A) \cap S_K(B)$  sont dites *essentiellement égales* si elles coïncident sur un sous-ensemble de densité 1. Nous noterons  $f_1 \equiv f_2$  une telle paire de fonctions.

Reste à prouver la première partie de l'assertion. Nous allons pour cela utiliser le lemma 4.6 de [8] que nous rappelons ci-dessous.

**Lemme 5.4 ([8])** *Soit  $A_1, A_2/K$  deux variétés abéliennes de représentations  $\ell$ -adiques modulo  $\ell$  notées  $\rho_{\ell, A_1}$  et  $\rho_{\ell, A_2}$ , de groupes de Galois associés notés  $G_{\ell, A_1}$  et respectivement  $G_{\ell, A_2}$ . Notons  $\Gamma_\ell \subset G_{\ell, A_1} \times G_{\ell, A_2}$  le groupe de Galois correspondant à  $A_1 \times A_2$ . On suppose ici que  $f_{\ell, A_1} \equiv f_{\ell, A_2}$ . Alors*

$$\forall (x, y) \in \Gamma_\ell, \quad \det(x - 1) = 0 \iff \det(y - 1) = 0.$$

Revenons à notre situation et supposons  $K(A_1[\ell]) \neq K(A_2[\ell])$  pour  $\ell$  assez grand. Supposons par exemple  $K(A_1[\ell]) \not\subset K(A_2[\ell])$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , notons  $\pi_i$  la projection de  $\Gamma_\ell \subset G_{\ell, A_1} \times G_{\ell, A_2}$  sur chacun des facteurs  $G_{\ell, A_i}$ .

**Fait 1 :** Le groupe  $\pi_1(\ker(\pi_2))$  est distingué dans  $G_{\ell, A_1}$  et non trivial si  $K(A_1[\ell]) \not\subset K(A_2[\ell])$ .

En effet,  $\pi_1$  surjective et  $\ker(\pi_2)$  distingué dans  $\Gamma_\ell$  entraînent la première partie de l'assertion. Pour la seconde partie, notons que dire que  $\pi_1(\ker(\pi_2)) = \{1\}$  équivaut à dire que  $\ker(\pi_2) \subset \ker(\pi_1)$  ce qui équivaut visiblement à dire que  $\ker(\pi_2)$  est trivial. On voit dans ce cas que le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{array}{ccc} G_K & \xrightarrow{\rho_{\ell, A_1}} & G_{\ell, A_1} \\ & \searrow \rho_{\ell, A_2} & \nearrow \pi_1 \circ \pi_2^{-1} \\ & G_{\ell, A_2} & \end{array}$$

On en déduit dans ce cas que  $\ker(\rho_{\ell, A_2}) \subset \ker(\rho_{\ell, A_1})$  donc que l'extension  $K(A_1[\ell])$  est incluse dans  $K(A_2[\ell])$  ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

**Fait 2 :** L'élément  $-1$  est dans le groupe  $\pi_1(\ker(\pi_2))$ .

En effet, on sait par le lemme 2.2 que  $\lambda \circ \rho_{\ell, A_1} = \lambda \circ \rho_{\ell, A_2}$ , donc si  $u \in \pi_1(\ker(\pi_2))$ , il existe  $x \in G_K$  tel que  $u = \rho_{\ell, A_1}(x)$  et  $\rho_{\ell, A_2}(x) = 1$ . En particulier,  $\lambda(u) = \lambda(1) = 1$ , donc  $u$  est dans le groupe  $\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$ . Par le lemme 2.4 et le fait 1, le groupe  $\pi_1(\ker(\pi_2))$  est donc  $\{\pm 1\}$  ou  $\mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{F}_\ell)$  et notamment  $-1 \in \pi_1(\ker(\pi_2))$ .  $\square$

En appliquant le fait 2, on voit que l'élément  $(-1, 1)$  est dans  $\Gamma_\ell$ . Mais  $\det(-1 - 1) \neq 0$  alors que  $\det(1 - 1) = 0$ . Les fonctions  $f_{\ell, A_1}$  et  $f_{\ell, A_2}$  étant essentiellement égales, ceci contredit le lemme 5.4 précédent et conclut la preuve de l'étape (1).

## 5.2 Preuve de l'étape (2)

Nous savons maintenant que les variétés abéliennes  $A_1$  et  $A_2$  sont isogènes sur  $\overline{K}$ . En particulier elles ont même dimension, notée  $g$ . De plus par l'étape (1) il existe une infinité de premiers  $\ell$  tels que  $[K(A_1[\ell], A_2[\ell]) : K(A_1[\ell])] = 1$ . Pour un tel premier la proposition 3.2 affirme l'existence d'un caractère quadratique

$$\varepsilon_\ell : G_K \rightarrow \{\pm 1\} \quad \text{tel que} \quad \rho_{\ell, A_1} \sim \varepsilon_\ell \otimes \rho_{\ell, A_2}.$$

Nous pouvons alors appliquer la proposition 4.2. Soit  $\ell \in \Lambda$ ,  $\ell \geq 4g + 1$ . Les  $\varepsilon_\ell$  définis précédemment sont non ramifiés en dehors d'un ensemble fini de places de  $K$  indépendant de  $\ell$ . Ceci implique que les  $\varepsilon_\ell$  varient dans un ensemble fini (quand  $\ell$  est variable). Quitte à remplacer  $\Lambda$  par une sous-partie infinie, on peut donc supposer que  $\varepsilon_\ell$  est indépendant de  $\ell$ . C'est précisément ce que l'on voulait montrer.

### 5.3 Preuve de l'étape (3)

Rappelons que  $A_1$  et  $A_2$  étant  $\overline{K}$ -isogènes d'après l'étape (1), elle ont en particulier la même dimension que nous noterons  $g$ . Montrons que  $\rho_{\ell, A_1} \sim \rho_{\ell, A_2}$  pour une infinité de  $\ell$ . La conclusion résulte alors de Faltings (proposition 4.1). Il suffit donc de prouver le lemme suivant :

**Lemme 5.5** *Si le caractère  $\varepsilon : G_K \rightarrow \{\pm 1\}$  est non trivial et si  $\rho_{\ell, A_1} \sim \rho_{\ell, A_2} \otimes \varepsilon$ , alors les fonctions  $f_{\ell, A_1}$  et  $f_{\ell, A_2}$  ne sont pas essentiellement égales pour  $\ell$  assez grand.*

Pour ce faire nous utiliserons un résultat sur la décomposition d'une place dans une extension de la forme  $K(A[\ell])$ .

**Lemme 5.6** *Soit  $p \neq q$  deux nombres premiers et soit  $A/K$  une variété abélienne sur un corps de nombres. Soit  $v$  une place finie de  $K$  au dessus de  $p$ , telle que  $A$  a bonne réduction en  $v$ . Le groupe  $A(\mathbb{F}_v)$  contient  $A[q] \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{2 \dim A}$  si et seulement si  $v$  est totalement décomposée dans l'extension  $K(A[q])/K$ .*

*Démonstration :* Notons  $\pi_v$  l'endomorphisme de Frobenius sur  $A_v/\mathbb{F}_v$ . Par construction on a

$$\ker(\pi_v - \text{Id}) = A_v(\mathbb{F}_v).$$

Donc  $A_v(\mathbb{F}_v)$  contient un  $A[q]$ -groupe si et seulement si  $\pi_v|_{A_v[q]} = \text{Id}_{A_v[q]}$ . Cette dernière assertion est équivalente à dire que le groupe de décomposition  $D_q(v/p)$  est trivial dans  $\text{Gal}(K(A[q])/K)$ . Notons que  $p$  étant premier à  $q$ , on identifie  $A_v[q]$  et  $A[q]$  via l'injection de  $A(K)_{\text{tors}, p}$  dans  $A_v(\mathbb{F}_v)$ . Enfin le dernier point est équivalent à dire que  $v$  est totalement décomposée dans l'extension  $K(A[q])/K$ .  $\square$

**Lemme 5.7** *Soit  $A/K$  une variété abélienne pleinement de type  $\text{GSp}$  et  $L/K$  une extension finie. Si  $\ell$  est suffisamment grand alors  $L \cap K(A[\ell]) = K$ .*

*Démonstration :* Il s'agit de la proposition 2.6 de [8].  $\square$

**Démonstration du lemme 5.5.** Notons

$$S_\ell^{td} := \{v \in S_K(A_1) \cap S_K(A_2) \mid v \text{ se décompose totalement dans } K(A_1[\ell])\}.$$

D'après le lemme 5.6 précédent, si  $v \in S_\ell^{td}$  alors  $A_1(\mathbb{F}_v)[\ell] = A_1[\ell]$ . En particulier (via l'accouplement de Weil) on en déduit que le groupe  $\mu_\ell$  est inclus dans  $A_1(\mathbb{F}_v)$  et donc que

$\ell \mid \text{Card}(A_1(\mathbb{F}_v))$ . Ceci prouve que  $f_{\ell, A_1}(v) = 1$ . Montrons maintenant que nos hypothèses implique que  $f_{\ell, A_2}(v) = 0$  pour  $v$  variant dans un sous-ensemble de densité strictement positive, ceci contredira que les fonctions  $f_{\ell, A_1}$  et  $f_{\ell, A_2}$  sont essentiellement égales.

Précisément notons  $L/K$  l'extension quadratique correspondant au caractère  $\varepsilon$  et notons  $\zeta_v := \varepsilon(\text{Frob}_v) \in \{\pm 1\}$ . Notons  $S'_\ell$  le sous-ensemble de  $S_\ell^{td}$  constitué des  $v$  telles que  $\zeta_v = -1$ . L'ensemble  $S'_\ell$  a une densité non nulle d'après le lemme 5.7. Reste à vérifier que  $f_{\ell, A_2}$  est nulle sur cet ensemble.

La place  $v$  est totalement décomposée dans  $K(A_1[\ell])$  donc  $\rho_{\ell, A_1}(\text{Frob}_v) = \text{Id}_{A_1[\ell]}$ . De plus le Frobenius est un générateur topologique du groupe de Galois  $G_{\mathbb{F}_v}$  donc l'accouplement de Weil nous permet d'en déduire que si  $\sigma \in G_{\mathbb{F}_v}$  alors  $\sigma$  agit trivialement sur  $\mu_\ell$ . Notons par ailleurs

$$\pi_{A_i}(T) = \det(1 - \rho_{\ell, A_i}(\text{Frob}_v)|V_\ell(A_i)T) \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

On voit que  $v$  totalement décomposée implique que

$$\pi_{A_1}(T) = \det(1 - T) = (1 - T)^{2g} \mod \ell$$

et si de plus  $v \in S'_\ell$  on a également

$$\pi_{A_2}(T) = (1 + T)^{2g} \mod \ell.$$

En particulier,

$$\text{Card}(A_2(\mathbb{F}_v)) = \pi_{A_2}(1) = 2^{2g} \mod \ell \neq 0.$$

Ceci prouve que  $f_{\ell, A_2}(v) = 0$  ce qui conclut. □

## Références

- [1] Banaszak, G. ; Gajda, W. ; Krasoń, P. *On Galois representations for abelian varieties with complex and real multiplications*. J. Number Theory 100 (2003), 117–132.
- [2] Banaszak, G. ; Gajda, W. ; Krasoń, P. *On the image of  $l$ -adic Galois representations for abelian varieties of type I and II*. Doc. Math. 2006, Extra Vol., 35–75 (électronique)
- [3] Chi, W. C.  *$l$ -adic and  $\lambda$ -adic representations associated to abelian varieties defined over number fields*. Amer. J. Math. 114 (1992), 315–353.
- [4] Dieudonné, J. *La géométrie des groupes classiques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1971.
- [5] Faltings, G. *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Invent. Math. 73 (1983) 349–366.
- [6] Frey, G. et Jarden, M. *Horizontal isogeny theorems*. Forum Mathematicum 14 (2002), 931–952.
- [7] Hall, C. *An open image theorem for a general class of abelian varieties*. Bull. Lond. Math. Soc., Vol. 43, No. 4 (2011), 703–711.

- [8] Hall, C, Perucca, A. *Radical characterizations of Elliptic curves*. Prépublication de 2011 arXiv [math.NT].
- [9] Hindry, M. et Ratazzi, N. *Torsion dans un produit de courbes elliptiques*. J. Ramanujam Math. Soc 25 (2010) 1–31.
- [10] Hindry, M. et Ratazzi, N. *Points de torsion sur les variétés abéliennes de type  $GSp$* . J. Institut Math. Jussieu, Vol. 11, No. 1, Janvier 2012, pp 27–65.
- [11] Mumford, D. *Families of abelian varieties*. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*. Amer. Math. Soc. Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, (1966) 347–351.
- [12] Parshin, A.N.; Zarhin, Y.G. *Finiteness problems in Diophantine Geometry*. Amer. Math. Soc. Transl. 143 (1989), 35–102.
- [13] Pink, R.  *$\ell$ -adic algebraic monodromy groups cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture*. J. Reine Angew. Math., 495 (1998), 187–237.
- [14] Raynaud, M. *Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* . Bulletin de la SMF 102 (1974), 241–280.
- [15] Ribet, K. *On  $\ell$ -Adic Representations Attached to Modular Forms*. Inventiones mathematicae 28 (1975), 245–275.
- [16] Ribet, K. *Galois action on division points of Abelian varieties with real multiplications*. Amer. J. Math. 98 (1976), 751–804.
- [17] Serre, J-P. *Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques*. Inventiones Mathematicae 15 (1972), 259–331.
- [18] Serre, J-P. *Lettre à Marie-France Vignéras (10 février 1986)*. In *Œuvres. Collected papers. IV* n° 137. 1985–1998. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [19] Serre, J-P. *Résumé des cours au Collège de France de 1984-1985*, *Œuvres. Collected papers. IV*, n° 135. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [20] Serre, J-P.; Tate, J. *Good reduction of abelian varieties*. Ann. of Math. 88 (1968) 492–517.
- [21] Zarhin, Y.G. *A finiteness theorem for unpolarized Abelian varieties over number fields with prescribed places of bad reduction*. Inventiones mathematicae 79 (1985) 309–321.